Ejemplo del Método Simplex Revisado

Javier Parra Peña

Ingeniería de Producción
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Ejemplo 1. Problema de Programación lineal por el Mtodo Siimplex Revisado

Considere el siguiente problema: max $2x_1 + 3x_2$

sujeto a: $2x_1 + x_2 \leq 14$

$-x_1 + 2x_2 \leq 8$

$2x_1 - 2x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

a. Dibuje la región de Factibilidad

b. Resuelva el Problema aplicando el método simplex.

Forma estándar

-min -2$x_1 - 3x_2$

sujeto a:

$2x_1 + x_2 + x_3 = 14$

$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 10$

$x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

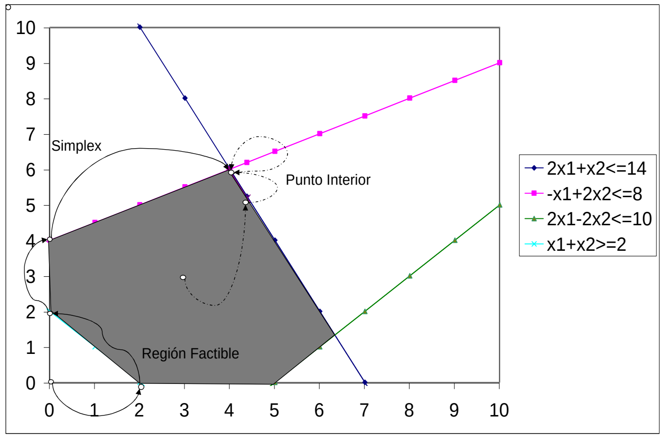

Figure 1: Evolución de las variables en la solución del problema

Dado que existe una variable artificial es necesario desarrollar el método de las dos fases, teniendo como función objetivo para la primera fase minimizar x_7

Fase I

Primera iteración

Variables básicas= $\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_7 \end{bmatrix}$ $\quad C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Variables no básicas= $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_6 \end{bmatrix}$ $\quad C_N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad z = C_B^T X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r^T = C_N^T - W^T N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

No Existe optimalidad, se debe por tanto aplicar la regla de Bland para determinar la variable que entra a la Base, en este caso x_1

$$A_q = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad D = -B^{-1}A_q = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad e_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la prueba de la razón mínima

$$\begin{bmatrix} -14/-2 \\ -8/1 \\ -10/-2 \\ -2/-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$,por tanto sale de la base la variable x_7

Segunda Iteración

Variables básicas= $\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \end{bmatrix}$ $\quad C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Variables no básicas= $\begin{bmatrix} x_7 & x_2 & x_6 \end{bmatrix}$ $\quad C_N^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = C_B^T X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r^T = C_N^T - W^T N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se ha llegado a una solución óptima para la primera fase.

Fase II

Iteración 1

Variables básicas= $\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \end{bmatrix}$ $\quad C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Variables no básicas= $\begin{bmatrix} x_2 & x_6 \end{bmatrix}$ $\quad C_N^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = C_B^T X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -4$$

$$W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$r^T = C_N^T - W^T N = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

No existe optimalidad, por la regla de Bland entra a la base la variable x_2

$$A_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = -B^{-1}A_q = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la prueba de la razón mínima

$$\begin{bmatrix} -10/1 \\ -10/-3 \\ -6/4 \\ -2/-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$,por tanto sale de la base la variable x_1

Iteración 2

Variables básicas= $\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_2 \end{bmatrix}$ $\quad C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Variables no básicas= $\begin{bmatrix} x_1 & x_6 \end{bmatrix}$ $\quad C_N^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad z = C_B^T X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix} = -6$$

$$W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$r^T = C_N^T - W^T N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$$

No existe optimalidad, por la regla de Bland entra a la base la variable x_6

$$A_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad D = -B^{-1}A_q = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}:$$

Aplicando la prueba de la razón mínima

$$\begin{bmatrix} -12/-1 \\ -4/-2 \\ -14/2 \\ -2/1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$,por tanto sale de la base la variable x_4

Iteración 3

Variables básicas= $\begin{bmatrix} x_3 & x_6 & x_5 & x_2 \end{bmatrix}$ $\quad C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Variables no básicas= $\begin{bmatrix} x_1 & x_4 \end{bmatrix}$ $\quad C_N^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad z = C_B^T X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} -12$$

$$W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r^T = C_N^T - W^T N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

No existe optimalidad, por la regla de Bland entra a la base la variable x_1

$$A_q = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad D = -B^{-1}A_q = -\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad e_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}:$$

Aplicando la prueba de la razón mínima

$$\begin{bmatrix} -10/-\frac{5}{2} \\ -2/\frac{3}{2} \\ -18/-1 \\ -4/\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{4}{3} \\ 18 \\ -8 \end{bmatrix}$$,por tanto sale de la base la variable x_3

Iteración 4

Variables básicas= $\begin{bmatrix} x_1 & x_6 & x_5 & x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad C_B^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Variables no básicas= $\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ $\qquad C_N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad z = C_B^T X = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix} = -26$$

$$W^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r^T = C_N^T - W^T N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Se ha llegado a la solución óptima

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 6, \qquad z = 26$$